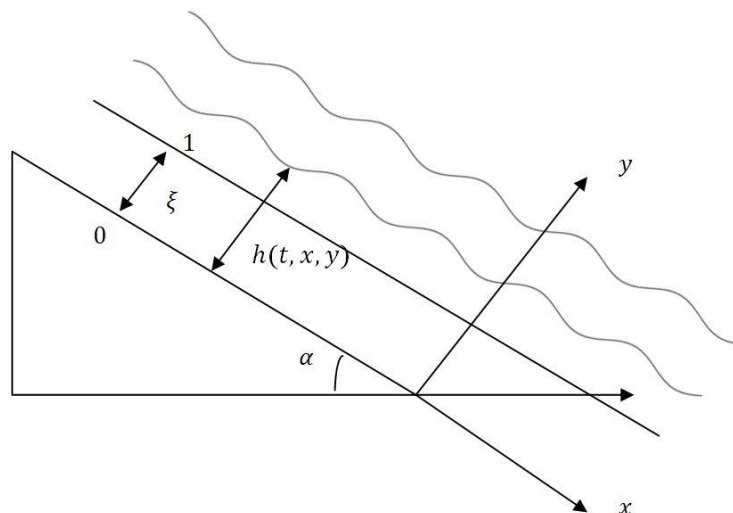


УДК 519.624

**ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ
ТОНКОЙ ПЛЁНКИ****Зотов И.Н.,****научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В.К.*****Сибирский федеральный университет***

Стекающие пленки широко применяются в технике для охлаждения электронных устройств, для интенсификации теплообмена и т.д. Поверхностные силы в таком течении могут доминировать над объемными силами или быть сравнимыми с ними. Одно из обнаруженных явлений при локальном нагреве стекающей пленки – это формирование пространственной самоорганизующейся структуры.

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α . Выберем систему декартовых координат x, y, z так, что ось Oz ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y, z): -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y)\}$, где H – толщина пленки и u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{v} .



При рассмотрении тонкой жидкой пленки, стекающей по наклоненной к горизонту плоской подложке, возникает следующая система уравнений:

$$hD(\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z) = \theta_{\xi\xi}, \quad (1)$$

$$-p = \Delta h - Ah + Cx, \quad (2)$$

$$h_t - (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_x + h^3\varphi p_x)_x + (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_y + h^3\varphi p_y)_y = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; координата $\xi = z/H(t, x, y)$, $p(t, x, y)$, $h(t, x, y)$, $\theta(t, x, y, \xi)$ – безразмерные переменные гидродинамического давления, толщины пленки и температуры жидкости соответственно; A, C, D, M – безразмерные критерии подобия. Числа A, C задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих. Число D является отношением порядковых интенсивностей кондуктивных и конвективных потоков тепла в пленке, а модифицированное число Марангони M характеризует действие термокапиллярных сил на поверхности неоднородно нагретой пленки.

Функции $F(t, x, y, \xi)$, $G(t, x, y, \xi)$, $\Phi(t, x, y, \xi)$, $\Gamma(t, x, y, \xi)$, $\varphi(t, x, y)$, $\gamma(t, x, y)$, $\tilde{\theta}(t, x, y)$ определяются с помощью соотношений:

$$F = \int_0^\xi \frac{(1-\tau) d\tau}{\mu(\theta(t, x, y, \tau))}, \quad G = \int_0^\xi \frac{d\tau}{\mu(\theta(t, x, y, \tau))}, \quad \Phi = \int_0^\xi F(t, x, y, \tau) d\tau, \quad \Gamma = \int_0^\xi G(t, x, y, \tau) d\tau,$$

$$\varphi(t, x, y) = \Phi(t, x, y, 1), \quad \gamma(t, x, y) = \int_0^1 G(t, x, y, \tau) d\tau, \quad \tilde{\theta}(t, x, y) = \theta(t, x, y, 1),$$

где $\mu(\theta)$ – динамическая вязкость.

Модифицированные компоненты вектора скорости:

$$u = -h^3 F p_x - M h^2 G \tilde{\theta}_x, \quad u = -h^3 F p_y - M h^2 G \tilde{\theta}_y, \\ w = (h^3 \Phi p_x + M h^2 \Gamma \tilde{\theta}_x)_x + (h^3 \Phi p_y + M h^2 \Gamma \tilde{\theta}_y)_y.$$

Рассмотрим однонаправленное движение жидкой пленки, стекающей по наклоненной плоской подложке ($\partial/\partial y = 0$), с постоянной вязкостью ($\mu = \text{const}$). Система (1) – (3) примет вид:

$$hD(\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_\xi) = \theta_{\xi\xi}, \quad (4)$$

$$-p = h_{xx} - Ah + Cx, \quad (5)$$

$$h_t - \left(\frac{h^3 p_x}{3\mu} + M h^2 \frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu} \right)_x = 0, \quad (6)$$

Далее будем считать, что на поверхности задана температура $\tilde{\theta}(t, x)$. Тогда температура внутри пленки $\theta(t, x, \xi)$ найдется как решение первой начально-краевой задачи для уравнения (4): $\theta(0, x, \xi) = \theta_0(x, \xi)$, $\theta(t, x, 0) = \theta_1(t, x)$, $\theta(t, x, 1) = \tilde{\theta}(t, x)$. Поэтому основной является задача (5) – (6). Для неё решается задача групповой классификации по отношению к произвольной функции $\tilde{\theta}(t, x)$ и постоянных A, C, M .

Пусть $h = u^1$, $p = u^2$, $\frac{h^3 p_x}{3\mu} + M h^2 \frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu} = u^3$, $\tilde{\theta}_x = q(x, t)$, $\tau = \mu^{-1}t$. Тогда система примет вид:

$$u^2 + u_{xx}^1 - A u^1 + Cx = 0, \quad (7)$$

$$u_t^1 - u_x^3 = 0, \quad (8)$$

$$h_t - \left(\frac{h^3 p_x}{3\mu} + M h^2 \frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu} \right)_x = 0, \quad (9)$$

На первом этапе группового анализа системы уравнений (7) – (9) исследуются свойства её инвариантности относительно преобразований пространства всех независимых и зависимых переменных $R^6(x, y, t, u^1, u^2, u^3)$. Продолженный инфинитезимальный оператор (выписаны только существенные слагаемые):

$$X_2 = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial u^3} + \zeta_1^1 \frac{\partial}{\partial u_t^1} + \zeta_2^1 \frac{\partial}{\partial u_x^1} + \zeta_2^3 \frac{\partial}{\partial u_x^3} + \zeta_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u_{xx}^1}, \quad (10)$$

где компоненты векторного поля $(\xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ являются функциями переменных (x, y, u^1, u^2, u^3) .

Используя классическую методику, после достаточно длинных вычислений находим общее решение определяющих уравнений:

$$\xi^1 = C_1, \quad \xi^2 = C_2, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = 0, \quad \eta^3 = 0 \quad (11)$$

и условие на функцию $q(x, t)$:

$$M(C_1 q_t + C_2 q_x) = 0, \quad (12)$$

Можно сделать следующие выводы:

1) Если $M = 0$ и $q(x, t)$ – произвольная, то $C_1 = C_2 = 0$ и допускаются только тождественные преобразования;

2) Если $M \neq 0$, то $mq_t + nq_x = 0$. Тогда:

а) если $m \neq 0$, то $nq_x + q_t = 0$. Отсюда $q = q(x - nt) = q(\xi)$, $C_2 q_\xi - nC_1 q_\xi = 0$, т.е. $C_2 = nC_1$. Поэтому $\xi^2 = nC_1$ и допускается оператор $X = \partial_t + n\partial_x$;

б) если $n = 0, m \neq 0$, то $q = q(x)$ и допускается оператор сдвига по времени $X = \partial_t$;

в) если $m = 0, n \neq 0$, то $q = q(t)$ и допускается оператор сдвига по координате x $X = \partial_x$;

г) если $q = \text{const}$, то допускаются одновременно два оператора $X_1 = \partial_t$ и $X_2 = \partial_x$.

Замечание 1. Если $q = q_0(t)x$ и $h = h(t)$, то уравнение (6) примет вид:
 $h_t = \frac{Mh^2 q_0(t)}{2\mu}$. Откуда

$$h(t) = \frac{h_0}{1 - \frac{h_0 M}{2\mu} \int_0^t q_0(\tau) d\tau} \quad (13)$$

Подбирая $q_0(t)$ можно рассматривать разные режимы плёнки.

Замечание 2. Рассмотрим уравнение (6). Без ограничения общности, можно переписать его в виде:

$$h_t = \left(\frac{h^3}{3} (-h_{xxx} + Ah_x - C) + \frac{Mh^2}{2} q(x, t) \right)_x. \quad (14)$$

Рассмотрим преобразование растяжения всех переменных: $\bar{h} = \alpha \bar{h}$, $x = \beta \bar{x}$, $\tau = \gamma \bar{\tau}$. Тогда уравнение (14) сводится к следующему:

$$\bar{h}_{\bar{\tau}} = \frac{\alpha^3 \gamma}{\beta^4} \left(\frac{\bar{h}^3}{3} \left(-\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + A\bar{h}_{\bar{x}} - \frac{\beta^3}{\gamma} C \right) + \frac{M\beta^3}{2\alpha^2} \bar{h}^2 \bar{q}(\bar{x}, \bar{\tau}) \right)_{\bar{x}}. \quad (15)$$

Пусть $\gamma = \alpha^{-3} \beta^4$, тогда вводя новые обозначения

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{\tau}) = \bar{q}(\beta \bar{x}, \gamma \bar{\tau}), \quad \beta^2 A = \bar{A}, \quad \frac{\beta^3}{\gamma} C = \bar{C}, \quad \frac{M\beta^3}{2\alpha^2} = \bar{M}, \quad (16)$$

получим вновь уравнение (6), т.е. преобразование (16), дополненное $\tau = \mu^{-1} t$, суть преобразования эквивалентности этого уравнения. Значит:

1) Если $A \neq 0, C \neq 0$, то выбирая $\alpha = \frac{1}{A^{\frac{1}{6}} C^{\frac{1}{3}}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\gamma = \frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}$ можно считать $A = 1$, $C = 1$;

2) Если $A = 0, C \neq 0$, то выбирая $\alpha = \frac{1}{M^{\frac{1}{7}} C^{\frac{3}{7}}}$, $\beta = \frac{3}{M^{\frac{2}{7}} C^{\frac{2}{7}}}$, $\gamma = \frac{9}{M^{\frac{3}{7}} C^{\frac{1}{7}}}$ можно считать $C = 1, M = 1$;

3) Если $A \neq 0, C = 0$, то выбирая $\alpha = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2} A^{\frac{1}{4}}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{2} A^{\frac{1}{4}}}{M^{\frac{3}{2}}}$ можно считать $A = 1, M = 1$.